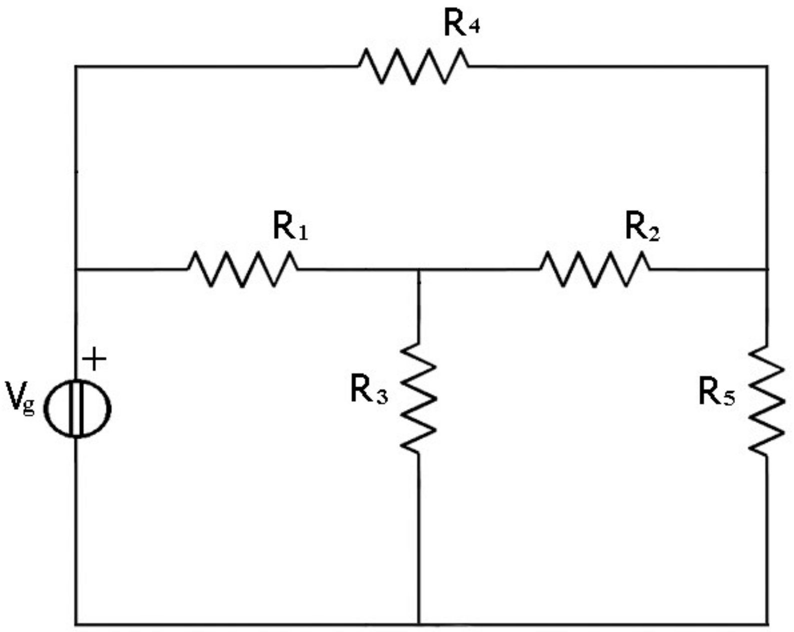
Esercizio 1

Risolvere il circuito in figura utilizzando il metodo alle maglie.



$$R_1 = 1\Omega$$
$$R_2 = 2\Omega$$
$$R_3 = 1\Omega$$
$$R_4 = 1\Omega$$
$$R_5 = 1\Omega$$
$$V_g = 4V$$

Figura 1

Risolvere un circuito con il metodo alle maglie significa determinare i valori delle correnti di maglia identificate.
Nel grafo associato al circuito, operiamo la scelta di un albero, come ad esempio quello indicato nella figura 2: il numero delle maglie indipendenti è pari al numero dei rami del coalbero che ne deriva e le correnti di maglia sono le correnti che scorrono sui rami del coalbero.

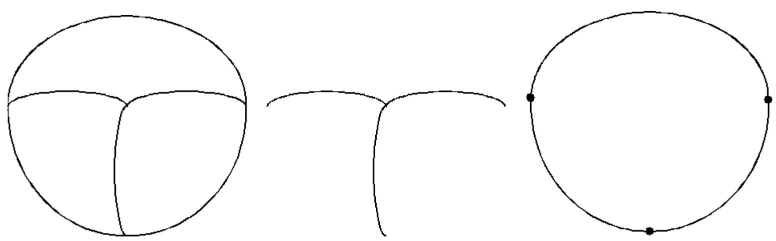


Figura 2

Si ricorda, infatti, che una maglia del circuito si ottiene aggiungendo all'albero un solo ramo del coalbero, come indicato nella figura 3.
Nella figura 4 è rappresentato il grafo associato al circuito con i rami dell'albero

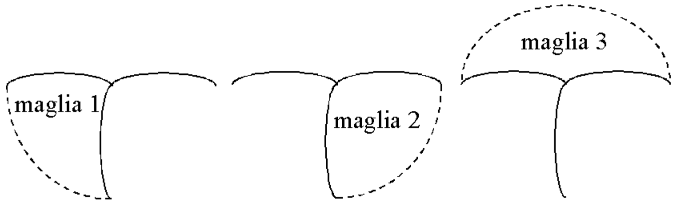


Figura 3

a tratto pieno e i rami del coalbero in tratteggio. Sono anche indicate le correnti di maglia, il cui verso è scelto in modo arbitrario.

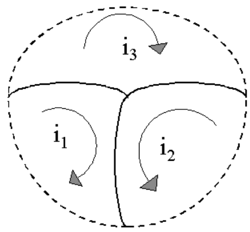


Figura 4

In figura 5 le correnti di maglia sono riportate nel circuito.

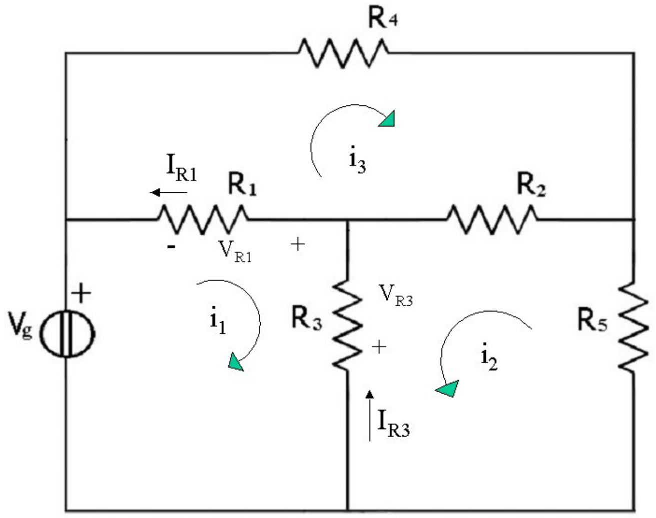


Figura 5

Ricordiamo che il metodo di risoluzione di un circuito alle maglie deriva dalla legge di Kirchhoff alle tensioni. Scriviamo per esercizio la legge di Kirchhoff alle tensioni per la maglia 1, dove V_{R_1} e V_{R_3} sono le tensioni ai capi delle resistenze R_1 e R_3, come indicato in figura 6:

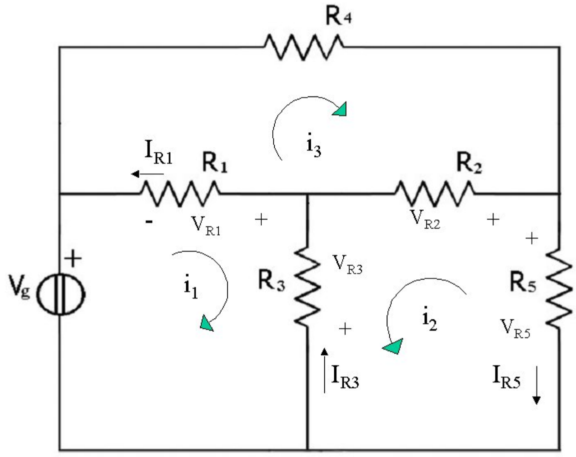


Figura 6

$V_g + V_{R_1} + V_{R_3} = 0$

Esprimiamo ora le tensioni ai capi dei resistori in funzione delle correnti che li attraversano:

$V_{R_1} = R_1 I_{R_1}$
$V_{R_3} = R_3 I_{R_3}$
$V_g + I_{R_1} R_1 + I_{R_3} R_3 = 0$

e le correnti dei rami del circuito in funzione delle correnti di maglia:

$I_{R_1} = i_3 - i_1$
$I_{R_3} = -i_1 - i_2$
$V_g + i_3 R_1 - i_1 R_1 - i_1 R_3 - i_2 R_3 = 0$
$V_g + i_1(-R_1 - R_3) + i_2(-R_3) + i_3(R_1) = 0$

Riordinando rispetto alle correnti di maglia, che rappresentano le incognite del problema si ha l'equazione alla prima maglia in forma canonica:

$(R_1 + R_3)i_1 + R_3 i_2 - R_1 i_3 = V_g$

Operando analogamente per le maglie successive, si ha il sistema risolvente di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)i_1 & +R_3 i_2 & -R_1 i_3 & = V_g \\ R_3 i_1 & +(R_2 + R_3 + R_5)i_2 & +R_2 i_3 & = 0 \\ -R_1 i_1 & +R_2 i_2 & +(R_1 + R_2 + R_4)i_3 & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione.

$$\begin{cases} 2i_1 & +i_2 & -i_3 = 4 \\ 1i_1 & +4i_2 & +2i_3 = 0 \\ -1i_1 & +2i_2 & +4i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8i_2 - 4i_3 + i_2 - i_3 = 4 \\ i_1 = -4i_2 - 2i_3 \\ 4i_2 + 2i_3 + 2i_2 + 4i_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} -7i_1 - 5i_2 = 4 \\ i_1 = -4i_2 - 2i_3 \\ 6i_2 + 6i_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} -7i_3 - 5i_3 = 4 \\ i_1 = 4i_3 - 2i_3 = 2i_3 \\ i_2 = -i_3 \end{cases} \begin{cases} i_3 = 2 \\ i_2 = -2 \\ i_1 = 4 \end{cases}$$

Risolviamo per esercizio il sistema (1) anche con il metodo di Cramer.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$detA = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 - 6 - 6 = 12$$

$$i_1 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{4}{12}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{4}{12}12 = 4$$

$$i_2 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{4}{12}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{4}{12}6 = -2$$

$$i_3 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{6}{3} = 2$$

Una volta trovate le correnti di maglia possiamo ricavare le correnti e le tensioni su ogni componente del circuito.
Ad esempio, sul resistore R_1 scorre la corrente I_{R_1} che riceve contributi dalle correnti di maglia i_1 e i_3. Considerando che il verso arbitrariamente scelto per I_{R_1} è concorde con i_3 ma discorde con i_1, le due correnti di maglia dovranno essere sommate la prima con segno positivo e la seconda consegno negativo:

$I_{R_1} = i_3 - i_1 = 2 - 4 = -2$ A.

Di conseguenza, la tensione ai capi del resistore sarà:

$V_{R_1} = I_{R_1} R_1 = -2 \cdot 1 = -2$ V.

e la potenza dissipata dall'elemento:

$P_{R_1} = R_1 I_{R_1}^2 = 1 \cdot (-2)^2 = 4$ W.