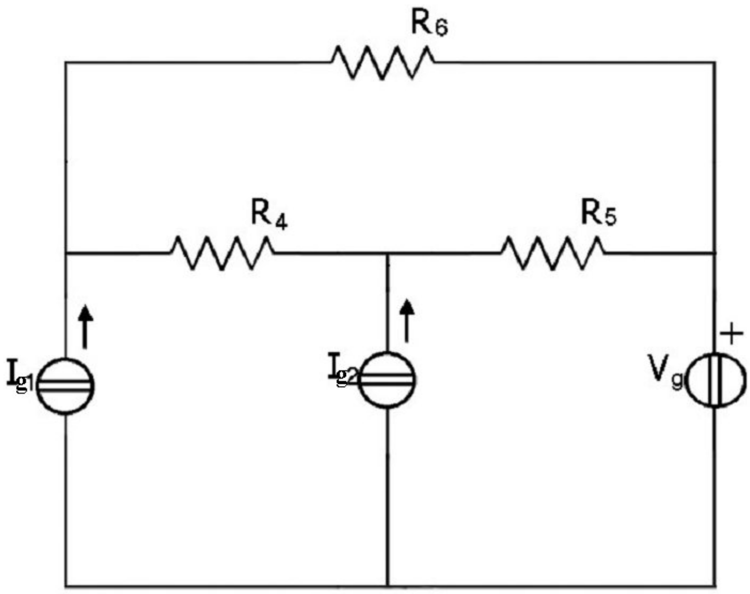
Esercizio 3

Risolvere il circuito in figura 1 utilizzando dapprima il metodo alle maglie e poi il metodo ai nodi, verificando inoltre l'uguaglianza fra i risultati ottenuti con i due metodi.



$$I_{g_1} = 2A$$
$$I_{g_2} = 1A$$
$$V_g = 1V$$
$$R_4 = 1\Omega$$
$$R_5 = 1\Omega$$
$$R_6 = 2\Omega$$

Figura 1

Risolvere un circuito con il metodo alle maglie significa determinare i valori delle correnti di maglia identificate.
Per risolvere il circuito con il metodo alle maglie, operiamo la scelta di un albero nel grafo associato al circuito, come ad esempio quello indicato in figura 2.
Si fa notare che è stata effettuata la scelta dell'albero in modo che i generatori di corrente siano tutti su rami del coalbero: tale scelta di solito apporta delle semplificazioni al sistema risolvente, in quanto permette di considerare in modo

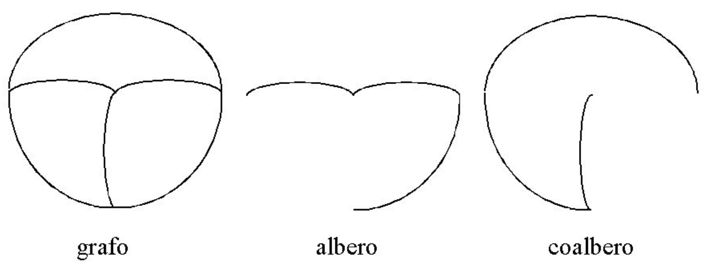


Figura 2

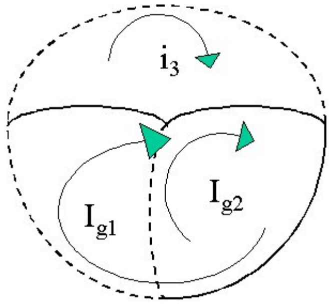


Figura 3

immediato le equazioni di vincolo che derivano dalla presenza di generatori di corrente.
Il numero delle maglie indipendenti è pari al numero dei rami del coalbero che ne deriva e le correnti di maglia sono le correnti che scorrono sui rami del coalbero.
In figura 3 è rappresentato il grafo associato al circuito con i rami dell'albero a tratto pieno e i rami del coalbero in tratteggio. Sono anche indicate le correnti di maglia.
Indichiamo con V_{x_1} e V_{x_2} le tensioni incognite ai capi dei generatori di corrente, come mostrato in figura 4.

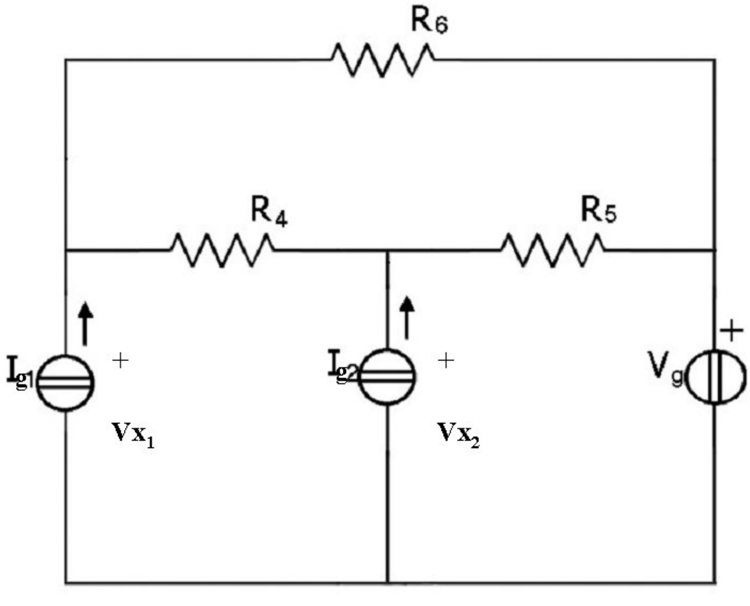


Figura 4

Scriviamo il sistema risolvente di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} (R_4+R_5)I_{g_1} & +R_5 I_{g_2} & -(R_4+R_5)i_3 & = V_{x_1} - V_g \\ R_5 I_{g1} & +R_5 I_{g_2} & -R_5 i_3 & = V_{x_2} - V_g \\ -(R_4+R_5)I_{g_1} & -R_5 I_{g_2} & +(R_4+R_5+R_6)i_3 & = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione.

$$\begin{cases} 4+1-2i_3 = V_{x_1} - 1 \\ 2+1-i_3 = V_{x_2} - 1 \\ -4-1+4i_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2i_3 + V_{x_1} = 6 \\ i + V_{x_2} = 4 \\ 4i_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} i_3 = 5/4 \\ V_{x_1} = 7/2 \\ V_{x_2} = 11/4 \end{cases}$$

Ricaviamo ora le correnti e le tensioni su tutti componenti, come indicato in figura 5.

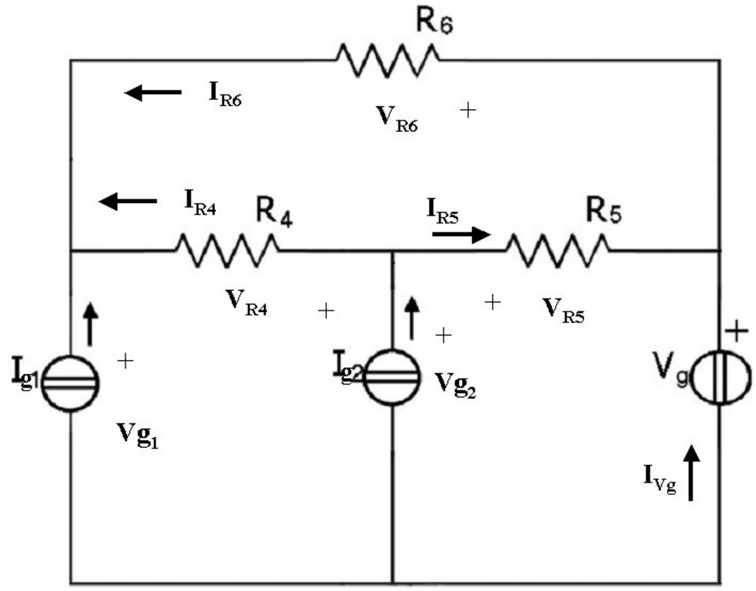


Figura 5

$I_{V_g} = -I_{g_1} - I_{g_2} = -3$

$I_{R_4} = -I_{g_1} + i_3 = -2 + 5/4 = -3/4$

$I_{R_5} = I_{g_1} + I_{g_2} - i_3 = 2 + 1 - 5/4 = 7/4$

$I_{R_6} = -i_3 = -5/4$

$V_{R_4} = R_4 I_{R_4} = -3/4$

$V_{R_5} = R_5 I_{R_5} = 7/4$

$V_{R_6} = R_6 I_{R_6} = -5/2$

$V_{g_1} = V_{x_1} = 7/2$

$V_{g_2} = V_{x_2} = 11/4$

Risolviamo ora lo stesso circuito in figura 1 con il metodo ai nodi.
Identifichiamo i nodi presenti nel circuito in esame e numeriamoli da 1 a 4, come in figura 6. Consideriamo come nodo di riferimento il nodo 4. Di solito, in presenza di generatori di tensione, conviene consideare il nodo di riferimento in posizione tale che il maggior numero possibile di generatori di tensione abbia il polo negativo collegato al nodo di riferimento stesso.
In figura 7 sono indicate le tensioni ai nodi E_1, E_2 ed E_3.

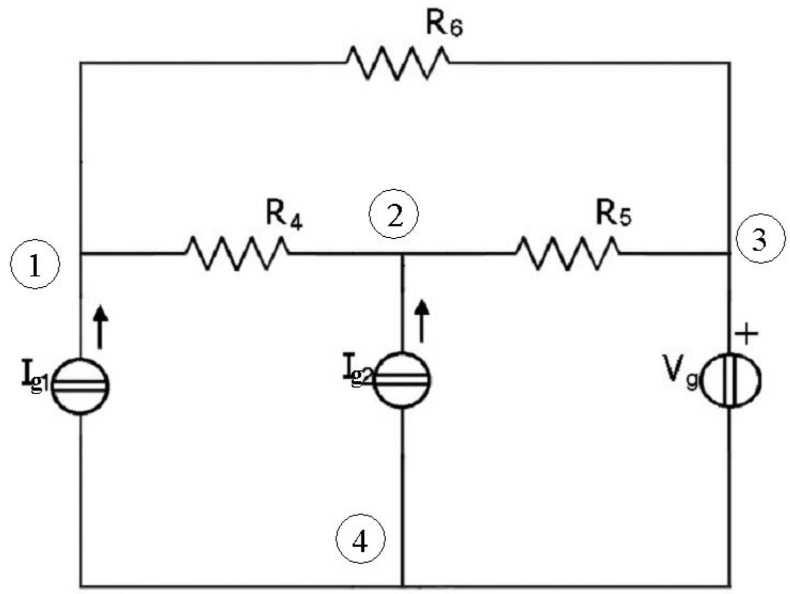


Figura 6

Il sistema risolvente con il metodo ai nodi si ottiene scrivendo le leggi di Kirchhoff alle correnti per tutti i nodi individuati, tranne il nodo di riferimento.
Indichiamo con I_x la corrente incognita che attraversa il generatore di tensione. Il valore della tensione del nodo 3 è noto, ed è uguale a V_g, si otterrà dunque, in questo caso, un sistema di 3 equazioni in 3 incognite e le uniche incognite saranno le tensioni E_1, E_2 ed I_x:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} (G_4+G_6)E_1 & -G_4E_2 & -G_6E_3 & = I_{g_1} \\ -G_4E_1 & +(G_4+G_5)E_2 & -G_5E_3g & = I_{g_1} \\ -G_6E_1 & -G_5E_2 & +(G_5+G_6)E_3 & = I_x \end{array} \right.$$

L'equazione di vincolo da considerare per la presenza del generatore di tensione è:

$E_3 = V_g$

ed il sistema si può dunque riscrivere così:

$$\begin{cases} (G_4+G_6)E_1 & -G_4E_2 & -G_6V_g & = I_{g_1} \\ -G_4E_1 & +(G_4+G_5)E_2 & -G_5V_g & = I_{g_1} \\ -G_6E_1 & -G_5E_2 & +(G_5+G_6)V_g & = I_x \end{cases}$$

Sostituiamo i valori delle conduttanze e della tensione erogata dal generatore e risolviamo il sistema:

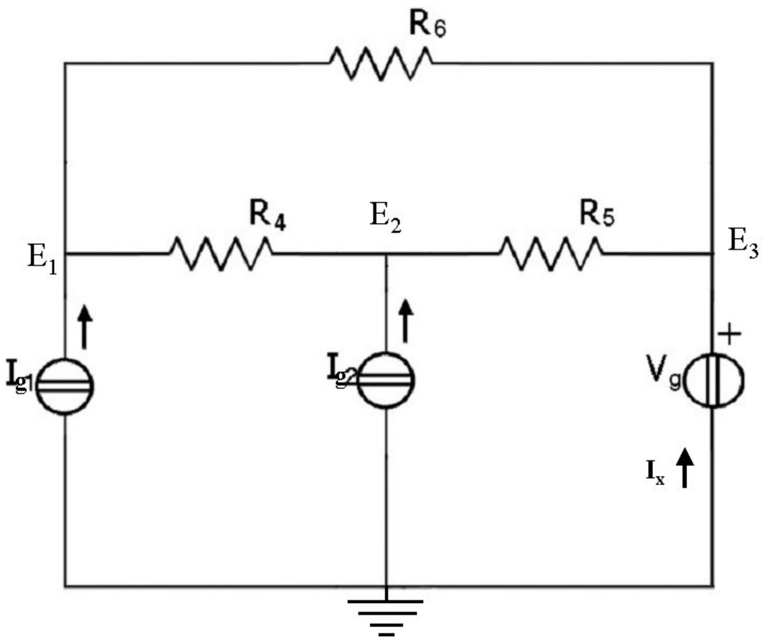


Figura 7

$$\begin{cases} \frac{3}{2}E_4 - E_2 - \frac{1}{2} = 2 \\ -E_1 + 2E_2 - 1 = 1 \\ -\frac{1}{2}E_1 - E_2 + \frac{3}{2} = I_x \end{cases} \quad \begin{cases} 3E_1 - 2E_2 = 5 \\ -E_1 + 2E_2 = 2 \\ E_1 + 2E_2 + 2I_x = 3 \end{cases}$$

$I_x = \frac{1}{2}E_1 - E_2 + \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} 3E_1 - 2E_2 = 5 \\ -E_1 + 2E_2 = 2 \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema di due equazioni in due incognite residuo con il metodo di Cramer, determinando le tensioni ai nodi.

$\Delta = 6 - 2 = 4$

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{10+4}{4} = \frac{14}{4} = 7/2$$

$$E_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6+5}{4} = 11/4$$

$I_x = -\frac{1}{2}\frac{7}{2} - \frac{11}{4} + \frac{3}{2} = \frac{-18+6}{4} = -\frac{12}{4} = -3$

Confrontiamo ora i risultati ottenuti con i due metodi, per verificarne l'uguaglianza. Per operare tale confronto, dobbiamo calcolare le tensioni e le correnti su ogni componente circuitale: sono queste tensioni e correnti che devono risultare dello stesso valore, sia che siano state calcolate con il metodo alle maglie, sia che siano state calcolate con il metodo ai nodi, e qualunque sia l'albero scelto per il metodo alle maglie o il nodo di riferimento scelto per il metodo ai nodi!
Di seguito si ripotano i valori delle tensioni e delle correnti per ciascun elemento del circuito.
Le correnti si intendono sempre verso destra o verso l'alto.
Le tensioni si intendono sempre con il + a destra o in alto.

$V_{R_4} = E_2 - E_1 = \frac{11}{4} - \frac{7}{2} = -3/4$

$V_{R_5} = E_2 - E_3 = E_2 - V_g = \frac{11}{4} - 1 = 7/4$

$V_{R_6} = V_g - E_1 = 1 - \frac{7}{2} = -5/2$

$V_{g_1} = E_1 = 7/2$

$V_{g_2} = E_2 = 11/4$

$I_{R_4} = \frac{V_{R_4}}{R_4} = -3/4$

$I_{R_5} = \frac{V_{R_5}}{R_5} = 7/4$

$I_{R_6} = \frac{V_{R_6}}{R_6} = -\frac{5}{2}\frac{1}{2} = -5/4$

$I_{V_g} = I_x = -3$