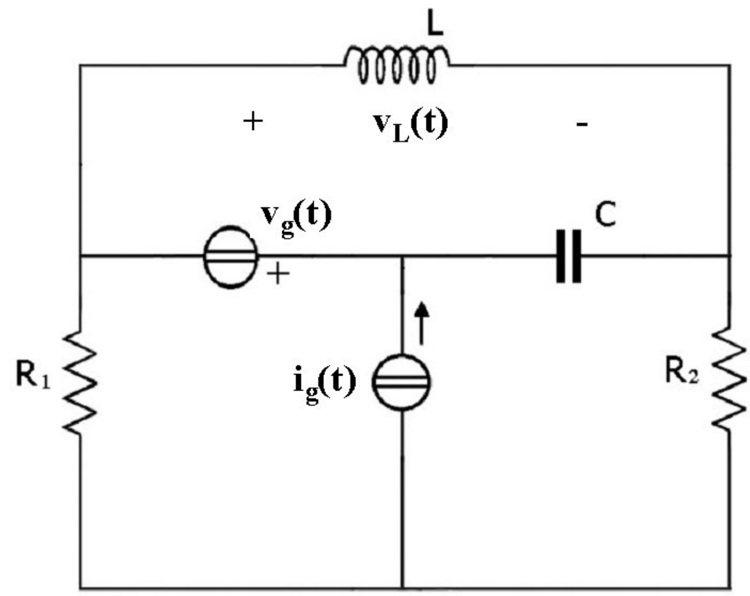
Esercizio 4

Nel circuito in figura 1:

1. Verificare il bilancio della potenza complessa
2. Determinare il valore della tensione $v_L(t)$ ai capi dell'nduttore



$v_g(t) = -\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{3}{4}\pi\right)$ V
$i_g(t) = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{3}{4}\pi\right)$ A
$R_1 = 1\Omega$
$R_2 = 1\Omega$
$L = 1$ H
$C = 3/2$ F

Figura 1

Per risolvere il circuito, effettuiamo il passaggio nel dominio dei fasori, calcolando anzitutto i fasori delle grandezze di eccitazione:

$\underline{V}_g = -\sqrt{2}e^{j\frac{3}{4}\pi} = -\sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + j\sin\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - j$

$\underline{I}_g = \sqrt{2}e^{j\frac{3}{4}\pi} = \sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + j\sin\frac{3}{4}\pi) = -1 + j$

La pulsazione delle grandezze sinusoidali d'eccitazione vale:

$\omega = 1$

Risolviamo ora il circuito utilizzando il metodo di analisi alle maglie.

Scegliamo l'albero indicato con tratto continuo in figura 2, nella quale è rappresentato il grafo associato al circuito.
Si fa notare che nella scelta dell'albero non è stata rispettata la regola secondo la quale, utilizzando il metodo di risoluzione su base maglie, conviene lasciare

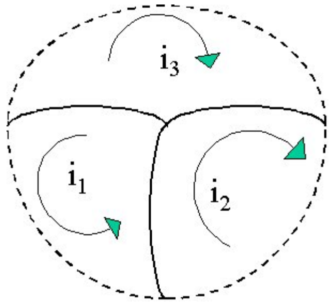


Figura 2

i generatori di corrente sui rami del coalbero. Si consiglia allo studente di affrontare la risoluzione di questo circuito tenendo conto di tale regola.

Disegnamo ora il circuito nel dominio dei fasori, come mostrato in figura 3, ed indichiamo con $\underline{V}_x$ la tensione incognita ai capi del generatore di corrente.

Impostiamo il sistema risolvente scrivendo le tre equazioni alle maglie più l'equazione di vincolo del generatore di corrente.

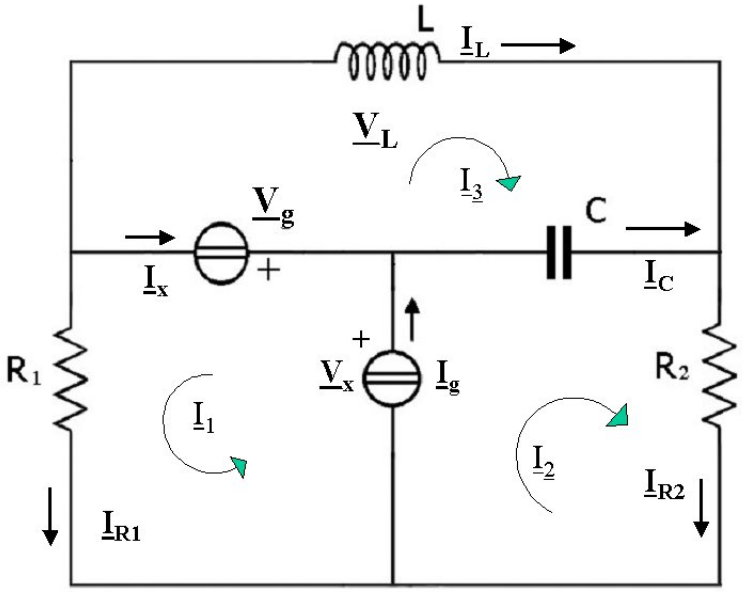


Figura 3

$$\begin{cases} R_1\underline{I}_1 = -\underline{V}_g + \underline{V}_x \\ (\frac{1}{j\omega C} + R_2)\underline{I}_2 - \frac{1}{j\omega C}\underline{I}_3 = \underline{V}_x \\ -\frac{1}{j\omega C}\underline{I}_2 + (j\omega L + \frac{1}{j\omega C})\underline{I}_3 = -\underline{V}_g \\ \underline{I}_g = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \end{cases}$$

Sostituiamo i valori numerici e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = -1 + j + \underline{V}_x \\ (1 - j\frac{2}{3})\underline{I}_2 + j\frac{2}{3}\underline{I}_3 = \underline{V}_x \\ \frac{2}{3}j\underline{I}_2 + (j - j\frac{2}{3})\underline{I}_3 = -1 + j \\ -1 + j = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{I}_1 = -1 + j + \underline{V}_x \\ (1 - j\frac{2}{3})\underline{I}_2 + j\frac{2}{3}\underline{I}_3) = \underline{V}_x \\ j\frac{2}{3}\underline{I}_2 + \frac{j}{3}\underline{I}_3 = -1 + j \\ \underline{I}_1 = -1 + j - \underline{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_2 = -\underline{V}_x \\ \underline{I}_2(2 - j\frac{2}{3}) + j\frac{2}{3}(3j + 3 - 2\underline{I}_2) = 0 \\ \underline{I}_3 = 3j + 3 - 2\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = -1 + j - \underline{I}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{V}_x = -1 \\ \underline{I}_2 = \frac{2-j2}{2-j2} = 1 \\ \underline{I}_3 = 1 + 3j \\ \underline{I}_1 = -2 + j \end{cases}$$

Bilancio di potenza.

Per effettuare il bilancio della potenza complessa, occorre verificare che la somma delle potenze attive erogate dai generatori è pari alla somma delle potenze attive assorbite dai resistori e che la somma delle potenze reattive erogate dai generatori è pari alla somma delle potenze reattive assorbite dai condensatori e dagli induttori.
Calcoliamo dunque la potenza complessa erogata da ciascun generatore.
La corrente $\underline{I}_x$ che attraversa il generatore di tensione vale:

$$\underline{I}_x = -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 = +2 - j - 1 - 3j = +1 - j4$$

La potenza complessa erogata dal generatore di tensione vale dunque:

$$P_{c_{V_g}} = \frac{1}{2}\underline{V}_g\underline{I}_x^* = \frac{1}{2}(1 - j)(1 + j4) = \frac{1+j4-j+4}{2} = \frac{5+j3}{2}$$

e quella erogata dal generatore di corrente:

$$P_{c_{I_g}} = \frac{1}{2}\underline{V}_x\underline{I}_g^* = \frac{1}{2}(-1)(-1 - j) = \frac{1+j}{2}$$

La potenza complessa globalmente erogata dai due generatori vale:

$$P_c = P_{c_{V_g}} + P_{c_{I_g}} = 3 + j2$$

Calcoliamo la potenza attiva assorbita da ciascun resistore:

$$\underline{V}_{R_1} = \underline{I}_1 R_1 = -2 + j; \qquad (\underline{I}_1 = \underline{I}_{R_1})$$

$$P_{a_{R_1}} = \frac{1}{2}R_1|\underline{I}_1|^2 = 2,5 \text{ W}$$

$\underline{V}_{R_2} = \underline{I}_2 R_2 = 1; \qquad (\underline{I}_2 = \underline{I}_{R_2})$

$P_{a_{R_2}} = \frac{1}{2} R_2 |\underline{I}_2|^2 = 0,5$ W

La potenza attiva globalmente assorbita dai resistori vale 3 Watt ed è pari alla parte reale della potenza complessa globalmente erogata dai generatori:

$P_{a_{tot}} = P_{a_{R_1}} + P_{a_{R_2}} = 3 = \Re e[P_c]$

Calcoliamo ora la potenza reattiva assorbita da ciascun induttore e condensatore:

$\underline{I}_L = \underline{I}_3$

$Q_L = \frac{1}{2} \omega L |\underline{I}_3|^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1+9) = 5$ VAR

$\underline{I}_C = \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = -3j$

$\underline{V}_C = \underline{I}_C \frac{1}{j\omega C} = -3j(-j\frac{2}{3}) = -2$

$Q_C = -\frac{1}{2} \omega C |\underline{V}_C|^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = -3$ VAR

La potenza reattiva globalmente assorbita dai resistori vale 2 VAR ed è pari alla parte immaginaria della potenza complessa globalmente erogata dai generatori:

$Q_{tot} = Q_L + Q_C = 2$ VAR$= \Im m[P_c]$

Calcolo della tensione $v_L(t)$.

Il fasore di tale tensione vale:

$\underline{V}_L = \jmath \omega L \underline{I}_3 = j(1+3j) = -3 + j$

Esprimiamo tale fasore in coordinate polari secondo la formula:

$\underline{V}_L = V_L e^{j\varphi}$

dove:

$V_L = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = 3,16$

$\varphi = \arctan(\frac{1}{-3}) + \pi = 2,82$

Si avrà allora:

$v_L(t) = V_L \cos(\omega t + \varphi) = 3,16 \cos(t + 2,82)$ V